Points méthode 1°S

Méthode d'identification Soit $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 3$. Déterminons les réels a, b et c tels que, pour tout réel x : $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

On a : $g(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Pour que l'égalité $f(x) = g(x)$ ait lieu *pour tout réel* x, il faut que :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2 \\ c - b = -6 \\ -c = 3 \end{cases}$$

Finalement, $a = 1$, $b = 3$ et $c = -3$ et ainsi :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 3 = (x-1)(x^2 + 3x - 3)$$

Mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré

$$2x^2 + 12x - 7 = 2\left(x^2 + 6x - \frac{7}{2}\right) = 2\left[(x+3)^2 - 9 - \frac{7}{2}\right] = 2\left[(x+3)^2 - \frac{25}{2}\right]$$

Equation de tangente Soit $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$. Ecrivons une équation de la tangente T à C_f en son point d'abscisse 5 : on commence par calculer $f'(x) = 6x - 4$. Alors : $T : y = f'(5)(x-5) + f(5) = 26(x-5) + 57$. Finalement : $T : y = 26x - 73$.

Théorème dit « de Cauchy » Montrons que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution dans [-1 ;1] : soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$. f est *dérivable* sur [-1 ;1] en tant que fonction polynôme. On a $f'x) = 3(x^2 - 1)$. Comme $f'(x) \leq 0$ sur [-1 ;1], f est *monotone* décroissante sur [-1 ;1]. Enfin, $f(-1)$ et $f(1)$ sont de *signes contraires*. La réunion de ces trois conditions implique que f possède un unique zéro α sur [-1 ;1].

Méthode de dichotomie Déterminons un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α :

$$f(0) > 0 \text{ et } f(1) < 0 \text{ donc } 0 < \alpha < 1$$

$$f(0) > 0 \text{ et } f(0,5) < 0 \text{ donc } 0 < \alpha < 0,5$$

$$f(0,25) > 0 \text{ et } f(0,5) < 0 \text{ donc } 0,25 < \alpha < 0,5$$

$$f(0,3) > 0 \text{ et } f(0,4) < 0 \text{ donc } 0,3 < \alpha < 0,4$$

Asymptote « oblique » Soit $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{7}{x-2}$. La droite D d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à C_f car :

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{7}{x-2} = 0$$

Positions relatives de deux courbes Soit P_1 la parabole d'équation $y = f(x) = 3x^2 - 3x + 5$ et P_2 la parabole d'équation $y = g(x) = 2x^2 + 3x$. Dressons un tableau donnant les positions relatives de P_1 et P_2 en fonction du réel x : ces positions dépendent du signe de la différence $d(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$. Ainsi (la ligne « Position »indique la position de P_1 par rapport à P_2) :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
Signe de $d(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Position		au dessus	*coupe*	en dessous	*coupe*	au dessus	

Equations et inéquations trigonométriques Résoudre dans $[0; 2\pi[$:

1. $\cos x = \sin x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} - x + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2} + x + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ (la seconde égalité est impossible). Les deux seules solutions dans $[0; 2\pi[$ sont donc $\boxed{x = \dfrac{\pi}{4}}$ et $\boxed{x = \dfrac{5\pi}{4}}$
2. $\sin x \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi; \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$. Ainsi $\boxed{S_{[0;2\pi[} = \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right]}$